BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№1 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2011

УДК 517.17

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ПРОСТРАНСТВА ТИПА СОБОЛЕВА-МОРРИ

Л.Ш.КАДЫМОВА

Институт Математики и Механики НАН Азербайджана

kleylusha1@rambler.ru

В данной работе построено пространство $\bigcap\limits_{i=0}^{n} L_{p^i,a,æ,\tau}^{\langle l^i\rangle}(G)$ с параметрами типа Соболева-Морри. Получены интегральные представления функций, определенных в n-мерных областях, удовлетворяющих условию гибкого λ-рога, доказывается, также свойства полноты пространств и эквивалентность по векторам æ.

Ключевые слова: пространство типа Соболева-Морри, условие гибкого λ–рога, интегральное представление функций, эквивалентность по векторам.

В этой работе вводится пространство

$$\bigcap_{i=0}^{n} L_{p^i,a,æ,\tau}^{\langle l^i\rangle}(G) \tag{1}$$

с параметрами и изучены некоторые свойства функции из этого пространства, где $G\subset R^n$, $p^i\in[1,\infty)$ $(i=0,1,...,n)$, $a\in[0,1]^n$, $æ\in(0,\infty)^n$, $\tau\in[1,\infty]$. Точки $l^i=(l_1^i,l_2^i,...,l_n^i)$, $l^i\in N_0^n$ $(i=0,1,...,n)$, которые являются «показателем» дифференциальных свойств этого пространства, все одновременно не лежат на n- мерной плоскости. Отметим, что пространство (1) при $1\le\tau<\infty$ совпадает с пространством $W_{p,a,æ,\tau}^{l}(G)$, которое изучено в [10], если в (1) положить, $l^0=(0,...,0)$ $l^i=(0,...,l_i,...,0)$, $(i=1,2,...,n)$, $p^0=p^1=...=p^n=p$, а при $\tau=\infty$, совпадает с пространством $W_{p,a,æ}^{l}(G)$, которое изучено в [5]. Кроме того в случае, когда в (1) $a=0,\ \tau=\infty$, тогда получается обобщенное пространство Соболева $\bigcap_{i=0}^{n} L_{p^i}^{\langle l^i\rangle}(G)$, которое изучено в [4].

Отметим, что пространства с параметрами, построенные на базе изотропных пространств Соболева $W_p^{(l)}(G)$, при некоторых частных значениях индексов впервые изучались в работах Морри [6-8]. В дальнейшем результаты Морри развивались и обобщались в работах В.П. Ильина [5], A.Mazzucato [9], В.С. Гулиева [3], В.И. Буренкова и Г.В. Гулиева [2], А.М. Наджафова [10, 11], Y. Sawano [12] и др.

Определение. *Обозначим через* $\bigcap_{i=0}^{n} L_{p^i,a,æ,\tau}^{\langle l^i\rangle}(G)$ *пространство локально суммируемых на* G *функции* f*, имеющих на* G *обобщенные производные* $D^{l^i} f \quad (i=0,1,\dots,n)$ *с конечной нормой*

$$\|f\|_{\bigcap_{i=0}^{n} L_{p^i,a,æ,\tau}^{\langle l^i\rangle}(G)} = \sum_{i=0}^{n} \left\| D^{l^i} f \right\|_{p^i,a,æ,\tau;G},$$

где

$$\|f\|_{p^i,a,æ,\tau;G} = \|f\|_{L_{p^i,a,æ,\tau}(G)} = \sup_{x\in G}\left\{\int_0^{\infty}\left[[t]_1^{-\frac{(æ,a)}{p^i}}\|f\|_{p^i,G_{t^{æ}}(x)}\right]^{\tau}\frac{dt}{t}\right\}^{\frac{1}{\tau}},\ 1\le\tau<\infty.$$

В случае $\tau=\infty$, пространства с нормой

$$\|f\|_{p^i,a,æ,\infty;G} = \|f\|_{p^i,a,æ;G} = \sup_{\substack{x\in G\\ 0<t<\infty}}\left([t]_1^{-\frac{(æ,a)}{p^i}}\|f\|_{p^i,G_{t^{æ}}(x)}\right)$$

введены В.П. Ильиным в [5], здесь $G_{t^{æ}}(x)=G\cap I_{t^{æ}}(x)$,

$[t]_1=\min\{1,t\}$

$$I_{t^{æ}}(x)=\left\{y:\left|y_j-x_j\right|<\frac{1}{2}t^{æ_j}\,(j=1,2,\dots,n)\right\},\ (æ,a)=\sum_{j=1}^{n}æ_j a_j\,,$$

$$|æ|=\sum_{j=1}^{n}æ_j\,.$$

Рассмотрим ряд свойств нормированного пространства $L_{p,a,æ,\tau}(G)$ и $\bigcap_{i=0}^{n} L_{p^i,a,æ,\tau}^{\langle l^i\rangle}(G)$.

1) При любом $æ_j > 0,\ 0 \le a_j \le 1,\ \ j = 1,2,...,n,\ 1 \le \tau \le \infty$ имеет место вложение

$$\bigcap_{i=0}^{n} L^{\langle l^i \rangle}_{p^i, a, æ, \tau}(G) \to \bigcap_{i=0}^{n} L^{\langle l^i \rangle}_{p^i, a, æ}(G) \to \bigcap_{i=0}^{n} L^{\langle l^i \rangle}_{p^i}(G),$$

т.е.

$$\|f\|_{\bigcap_{i=0}^{n} L^{\langle l^i \rangle}_{p^i}(G)} \le \|f\|_{\bigcap_{i=0}^{n} L^{\langle l^i \rangle}_{p^i, a, æ}(G)} \le c\|f\|_{\bigcap_{i=0}^{n} L^{\langle l^i \rangle}_{p^i, a, æ, \tau}(G)}.$$

2) Нормированное пространство $\bigcap_{i=0}^{n} L^{\langle l^i \rangle}_{p^i, a, æ, \tau}(G)$ является полным.

3) Для любого вещественного числа $c > 0$

$$\|f\|_{\bigcap_{i=0}^{n} L^{\langle l^i \rangle}_{p^i, a, cæ, \tau}(G)} \approx \|f\|_{\bigcap_{i=0}^{n} L^{\langle l^i \rangle}_{p^i, a, æ, \tau}(G)}.$$

4) При любом $æ = (æ_1, ..., æ_n),\ æ_j > 0,\ j = 1,2,...,n$ справедливы соотношения

$$\|f\|_{\bigcap_{i=0}^{n} L^{\langle l^i \rangle}_{p^i, 0, æ, \infty}(G)} = \|f\|_{\bigcap_{i=0}^{n} L^{\langle l^i \rangle}_{p^i}(G)}, \quad \|f\|_{\bigcap_{i=0}^{n} L^{\langle l^i \rangle}_{\infty}(G)} \le \|f\|_{\bigcap_{i=0}^{n} L^{\langle l^i \rangle}_{p^i, 1, æ, \tau}(G)},$$

где $\|f\|_{\bigcap_{i=0}^{n} L^{\langle l^i \rangle}_{\infty}(G)} \le \sum_{i=0}^{n} \left\| D^{l^i} f \right\|_{\infty, G}$.

5) Если G – ограниченная область, $p^i \le q^i,\ \dfrac{1 - b_j}{q^i} \le \dfrac{1 - a_j}{p^i}$, $i = 0,1,2,...,n$,

$1 \le \tau_1 \le \tau_2 \le \infty$, то $\bigcap_{i=0}^{n} L_{q, b, æ, \tau_1}(G) \to \bigcap_{i=0}^{n} L_{p, a, æ, \tau_2}(G)$ и

$$\|f\|_{\bigcap_{i=0}^{n} L^{\langle l^i \rangle}_{p^i, a, æ, \tau_2}(G)} \le \|f\|_{\bigcap_{i=0}^{n} L^{\langle l^i \rangle}_{q^i, b, æ, \tau_1}(G)}.$$

6) Если G - представляет собой теоретико-множественную сумму

открытых множеств $G_k \ \left(k=1,2,\dots,N\right),\ G=\bigcup_{k=1}^{N} G_k$, то

$$\|f\|_{\bigcap_{i=0}^{n} L^{\langle l^i \rangle}_{p^i,a,æ,\tau}(G)} \le 2^n \sum_{k=1}^{N} \|f\|_{\bigcap_{i=0}^{n} L^{\langle l^i \rangle}_{p^i,a,æ,\tau}(G_k)} .$$

Для изучения с точки зрения теории вложения, некоторые свойства функций из введенного пространства, мы построим как и в [1] интегральные представления для $f\in \bigcap_{i=0}^{n} L^{\langle l^i \rangle}_{p^i}(G)$, определенных в n-мерных областях, удовлетворяющих условию гибкого λ-рога.

Теорема. *Если*

$$\mu^i=\left(l^i,\lambda\right)-\left(v,\lambda\right)>0,\ i=1,2,\dots,n, \tag{2}$$

тогда для $f\in \bigcap_{i=0}^{n} L^{\langle l^i \rangle}_{p^i}(G)$ *имеет место, следующее интегральное представление*

$$D^v f(x)=D^v f_{T^\lambda}(x)+$$

$$+\int_0^T \int_{R^n} \sum_{i=1}^{n} t^{-1-|\lambda|-(v,\lambda)+\left(l^i,\lambda\right)} D^{l^i} f(x+y) M_i^{(v)}\left(\frac{y}{t^\lambda},\frac{\rho\left(t^\lambda,x\right)}{t^\lambda},\rho'\left(t^\lambda,x\right)\right)dydt$$

,

$$D^v f_{T^\lambda}(x)=(-1)^{|v|} T^{-|\lambda|-(v,\lambda)+\left(l^0,\lambda\right)}\times$$

$$\times\int_{R^n} D^{l^0} f(x+y)\,\Omega^{(v)}\left(\frac{y}{T^\lambda},\frac{\rho\left(T^\lambda,x\right)}{T^\lambda},\rho'\left(T^\lambda,x\right)\right)dy. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть $U\subset G$ - открытое множество в R^n, $\lambda=\left(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\right)\in(0,\infty)^n$ и $T\in(0,\infty)$. Будем предполагать, что $f\in L^{loc}(G)$ имеет на G все те обобщенные производные, которые войдут в рассмотрение. Введем усреднение функций $f(x\in U)$

$$f_{t^\lambda}(x)=t^{-|\lambda|}\int_{R^n} f(x+y)\Omega\left(\frac{y}{t^\lambda},\frac{\rho\left(t^\lambda,x\right)}{t^\lambda}\right)dy,\quad 0<t\le T, \tag{4}$$

где $\Omega(y,z)=\prod_{i=1}^{n}\omega_i(y_i,z_i)$, $\omega(y,z)=\frac{\partial^{k+1}}{\partial y^{k+1}}\left(\frac{y^k}{k!}\mu(y-z)\right)$,

$\int\omega(y,z)dy=1$, $k\in N_0$, $\rho(t^\lambda,x)$- определено в [1].

Усреднение (4) построено по значениям f в точках

$$x+y\in x+\rho(t^\lambda,x)+t^\lambda\theta^\lambda I=x+V(\lambda,x,\theta)\subset G.$$

Дифференцируя по t имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}f_{t^\lambda}(x)=-\int_{R^n}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i t^{-1-|\lambda|}K_i^{(k_ie_i+e_i)}\left(\frac{y}{t^\lambda},\frac{\rho(t^\lambda,x)}{t^\lambda},\rho'(t^\lambda,x)\right)f(x+y)dy, \qquad (5)$$

где $K_i(x,y,z)=\prod_{j\neq i}\omega_j(x_j,y_j)\xi_i(x_i,y_i,z_i)$, $K_i^{(\alpha)}(x,y,z)=D_x^\alpha K_i(x,y,z)$,

$$\int K_i^{(\alpha)}(x,y,z)dx=0,\ \forall\ y,z,\alpha,\ |\alpha|>0.$$

По формуле Ньютона-Лейбница из (4),(5) при $\varepsilon<t<T$ имеем

$$f_{\varepsilon^\lambda}(x)=f_{T^\lambda}(x)+\int_{\varepsilon}^{T}\int_{R^n}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i t^{-1-|\lambda|}K_i^{(k_ie_i+e_i)}\left(\frac{y}{t^\lambda},\frac{\rho(t^\lambda,x)}{t^\lambda},\rho'(t^\lambda,x)\right)dydt.$$

Пусть функция f на G имеет производные $D^{l^i}f\in L^{loc}(G)$, $i=0,1,...,n$, где $l_j^0\geq 0$ $(j=1,2,...,n)$; $l_i^i>0$, $l_j^i\geq 0$ $(j\neq i)$, $(i,j=1,2,...,n)$ - натуральные, кроме того, предполагаем, что $v=(v_1,...,v_n)\geq 0$ - целые $l_j^i\leq v_j$, $i\neq j=1,2,...,n;$ $l_i^i<v_i+k_i$, $i=1,2,...,n;$ $l_j^0\leq v_j$, $j=1,2,...,n$, так как k_i-числа входящие в ядро Ω.

Заметим, что если существует $D^v f$ на G, то в силу (3) и леммы 2 в [1] $f_{t^\lambda}^{(v)}(x)=D^v f$ при $x+c^{(\lambda)}t^\lambda I\subset G$, где $c^\lambda>0$. Применяя к обеим частям операцию дифференцирования по x, причем для слагаемых, стоящих справа, дифференцирование переносим на ядро, тогда получим

$$f_{\varepsilon^\lambda}^{(v)}(x)=f_{T^\lambda}^{(v)}(x)+$$

$$+(-1)^{|v|}\int_{\varepsilon}^{T}\int_{R^n}\sum_{i=1}^{n}t^{-1-|\lambda|-(v,\lambda)}\lambda_i K_i^{(v+k_ie_i+e_i)}\left(\frac{y}{t^\lambda},\frac{\rho(t^\lambda,x)}{t^\lambda},\rho'(t^\lambda,x)\right)f(x+y)dydt$$

и отсюда имеем

$$f_{\varepsilon^\lambda}^{(v)}(x)=f_{T^\lambda}^{(v)}(x)+$$

$$+\int_{\varepsilon}^{T}\int_{R^n}\sum_{i=1}^{n} t^{-1-|\lambda|-(v,\lambda)+(l^i,\lambda)} D^{l^i} f(x+y) M_i^{(v)}\left(\frac{y}{t^\lambda},\frac{\rho(t^\lambda,x)}{t^\lambda},\rho'(t^\lambda,x)\right)dydt \qquad (6)$$

$$f_{T^\lambda}^{(v)}(x)=(-1)^{|v|+|l^0|} T^{-|\lambda|-(v,\lambda)+(l^0,\lambda)}\times$$

$$\times\int_{R^n} D^{l^0} f(x+y)\Omega^{(v)}\left(\frac{y}{T^\lambda},\frac{\rho(T^\lambda,x)}{T^\lambda},\rho'(T^\lambda,x)\right)dy, \qquad (7)$$

где

$\Omega^{(v)}(y,z)=(-1)^{|l^0|} D_y^{v-l^0}\Omega(y,z)$, $M_i^{(v)}(x,y,z)=(-1)^{|v|+|l^i|}\lambda_i D_x^{v+k_i l_i+l_i-l^i} K_i(x,y,z)$.

Покажем, теперь, если выполнены условия (2), то на G существует обобщенная производная $D^v f\in L^{loc}(G)$, и получим для нее интегральное представление. Установим сначала, что

$$f_{\varepsilon^\lambda}^{(v)}-f_{\eta^\lambda}^{(v)}\to 0 \text{ при } 0<\varepsilon<\eta\to 0 \text{ в } L^{loc}(G). \qquad (8)$$

Пусть компакт $E\subset G,\ h>0\ E+hI\subset U$. В силу (4) достаточно малых ε, $\tau=\eta$ с помощью неравенства Минковского имеем

$$\left\|f_{\varepsilon^\lambda}^{(v)}-f_{\eta^\lambda}^{(v)}\right\|_{1,E}\le\sum_{i=1}^{n}\left\|D^{l^i} f\right\|_{1,E+hI}\left\|M^{(v)}\right\|_1\frac{\eta^{\mu^i}}{\mu^i}.$$

Отсюда в силу (2) вытекает (8). Предположим, что производная $D^v f$ существует на G и перейдем в (6) к пределу при $\varepsilon\to 0$, получим для почти всех $x\in U$ равенство (3) и напомним, что гибкий рог $x+V(\lambda,x,\theta)\subset G$ является носителем этого представления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1996, 480 с.
2. Буренков В.И., Гулиев Г.В. Необходимые и достаточные условия ограниченности максимального оператора в локальных пространствах Морри // Докл. РАН, 2003, т. 391, № 5, с. 591-594.
3. Гулиев В.С. Теорема Соболева для анизотропного потенциала Рисса-Бесселя в пространствах Морри-Бесселя // Докл. РАН, 1999, т. 367, № 2, с. 155-156.
4. Джабраилов А.Д. Теоремы вложения для пространств функций, смешанные производные которые удовлетворяют кратному интегральному условию Гельдера // Труды МИАН, СССР, 1972, т. 117, с. 113-138.
5. Ильин В.П. О некоторых свойствах функций из пространств $W_{p,a,æ,}^{l}(G)$ // Зап. науч. сем. ЛОМИ АН СССР, 1971, т. 23, с. 33-40.
6. Morrey C. On solution of quasilinear elliptic partial differential equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1938, 43, p.126-166.
7. Morrey C. Multiple integral problems in the calculus of variations and related topics. // Univ. California Publ. 1, 1943, p. 47-76.

8. Morrey C. Second order elliptic equations in several variables and Holder continuity // Math. Zeit, 1959, №72, v.2, p.146-164.
9. Mazzucato A. Decomposition of Besov-Morrey spaces. Harmonic analysis at Mount Holyoke // (South Hadley, MA, 2001), Contemp. Math., 320, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003, p. 279-294
10. Наджафов А.М. О некоторых свойствах функций из пространств типа Соболева-Морри // Сиб. мат. журн., 2005, т. 46, № 3, с. 634-648.
11. Najafov A.M. On some properties of the functions from Sobolev-Morrey type spaces. // Cent. Euro. J. Math. 3, 2005, № 3, p. 496-507.
12. Sawano Y. Idendification of the image of Morrey spaces by the fractional integral operators // Proc. Of A. Razmadze Math. Inst., 2009, №149, p.87-93.

SOBOLEV-MORRİ TİPLİ FƏZANIN BƏZİ XASSƏLƏRİ HAQQINDA

L.Ş.QƏDİMOVA

XÜLASƏ

Bu işdə Sobolev-Morri tipli parametrli $\bigcap_{i=0}^{n} L_{p^i,a,æ,\tau}^{\langle l^i \rangle}(G)$ fəzası qurulur. Bu fəzadan olan “çevik λ - buynyz” şərti ödəyən n -ölçülü oblastlarda təyin olunmuş funksiyalar üçün inteqral göstərilişi qurulur. Qurulmuş fəzaların tamlığı və æ vektoruna nəzərən ekvivalentliyi isbat olunur.

Açar sözlər: Sobolev-Morri tipli fəza, “çevik λ-buynuz” şərti, funksiyaların inteqral göstərilişi, vektora nəzərən ekvivalentlik.

ON SOME PROPERTIES OF SOBOLEV-MORREY TYPE SPACES

L.Sh.GADIMOVA

SUMMARY

In this paper, we built the space $\bigcap_{i=0}^{n} L_{p^i,a,æ,\tau}^{\langle l^i \rangle}(G)$ with the parameters of Sobolev-Morrey type. The integral representation of functions defined in n -dimensional domains satisfying the condition of elastic λ - horns is obtained, and the properties of completeness of spaces and the equivalence of æ vectors are proved.

Key words: Sobolev-Morrey type space, the condition of elastic λ -hors, the integral representation of functions, the equivalence of vectors.

Поступила в редакцию 03.07.2010 г.
Принято к печати 10.03.2011 г.